Лекція № 20

6. ПОСТІЙНЕ ЕЛЕКТРИЧНЕ ПОЛЕ У ВАКУУМІ

6.1. Рівняння для напруженості постійного електричного поля

Розглянемо рівняння Максвелла (5.29) за умов $\vec{j}=0,\ \vec{E}=\vec{E}(\vec{r})$

$$\begin{cases}\mathrm{div}\vec{H}=0;\\ \mathrm{rot}\vec{E}=-\dfrac{1}{c}\dfrac{\partial\vec{H}}{\partial t}.\end{cases}\qquad \begin{cases}\mathrm{div}\vec{E}=4\pi\rho;\\ \mathrm{rot}\vec{H}=\dfrac{1}{c}\cancel{\dfrac{\partial\vec{E}}{\partial t}}+\dfrac{4\pi}{c}\cancel{\vec{j}}.\end{cases}$$

$$\begin{cases}\mathrm{div}\vec{H}=0;\\ \mathrm{rot}\vec{E}=-\dfrac{1}{c}\dfrac{\partial\vec{H}}{\partial t}.\end{cases}\qquad \begin{cases}\mathrm{div}\vec{E}=4\pi\rho;\\ \mathrm{rot}\vec{H}=0.\end{cases}$$

або

$$\begin{cases}\mathrm{div}\vec{H}=0;\\ \mathrm{rot}\vec{H}=0.\end{cases}\qquad \begin{cases}\mathrm{div}\vec{E}=4\pi\rho;\\ \mathrm{rot}\vec{E}=-\dfrac{1}{c}\dfrac{\partial\vec{H}}{\partial t}.\end{cases}\tag{6.1}$$

Це рівняння для поля, яке створюють нерухомі заряди. Поле називають електростатичним.

Рівняння в (6.1) для напруженості магнітного поля

$$\begin{cases}\mathrm{div}\vec{H}=0;\\ \mathrm{rot}\vec{H}=0.\end{cases}$$

мають тільки тривіальний розв’язок $\vec{H}=0.$

Напруженість постійного електричного поля визначається рівняннями

$$\begin{cases}\mathrm{div}\vec{E}=4\pi\rho;\\ \mathrm{rot}\vec{E}=0.\end{cases}\tag{6.2}$$

Рівняння $\mathrm{rot}\vec{E}=0$ в системі рівнянь (6.2) вказує на безвихровий характер постійного електричного поля. Таке поле називають потенціальним полем. Напруженість постійного електричного поля можна представити у вигляді градієнту скалярної функції просторових змінних

$$\vec{E}(\vec{r})=-\nabla\varphi(\vec{r}).\tag{6.3}$$

$\varphi(\vec{r})$ – електростатичний потенціал.

В загальному випадку $\vec{E}(\vec{r},t) = -\nabla\varphi(\vec{r},t) - \frac{1}{c}\frac{\partial\vec{A}}{\partial t}$. (див. ф-ли (5.1)).

Перевіримо, що рівняння $\mathrm{rot}\vec{E} = 0$ виконано для $\vec{E}(\vec{r}) = -\nabla\varphi(\vec{r})$:

$$\mathrm{rot}\vec{E} = \left[\nabla, \vec{E}\right] = -[\nabla, \nabla\varphi] = -\underbrace{[\nabla, \nabla]}_{=0}\varphi = 0.$$

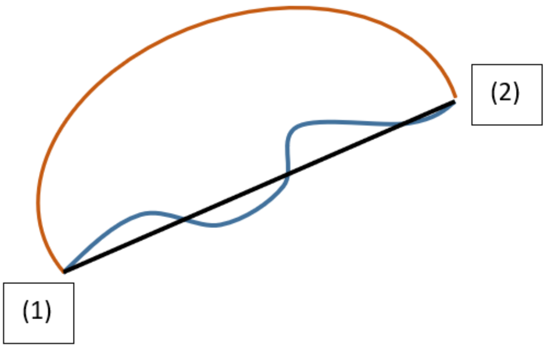
Ще раз нагадаємо, що векторне поле, яке можна представити у вигляді градієнту скалярного поля називається потенціальним полем. Електростатичне поле є потенціальним. Необхідна та достатня умова потенціальності

$$\mathrm{rot}\vec{E} = 0.$$

Важливою властивістю потенціального силового поля є те, що робота сил поля не залежить від форми траєкторії руху, а визначається тільки різницею потенціалів у початковій та кінцевій точках траєкторії. Елементарна робота

$$dA = \vec{F}d\vec{r} = e\vec{E}d\vec{r}.$$

Робота уздовж скінченної траєкторії є таким криволінійним інтегралом (див. рис.)



$$A = \int_{(1)}^{(2)} e\vec{E}d\vec{r}.$$

Далі

$$A = -e\int_{(1)}^{(2)} \nabla\varphi d\vec{r} = -e\int_{(1)}^{(2)} \left(\frac{\partial\varphi}{\partial x}\vec{i}_x + \frac{\partial\varphi}{\partial y}\vec{i}_y + \frac{\partial\varphi}{\partial z}\vec{i}_z\right)\cdot d\vec{r} =$$

$$= -e\int_{(1)}^{(2)} \left(\frac{\partial\varphi}{\partial x}dx + \frac{\partial\varphi}{\partial y}dy + \frac{\partial\varphi}{\partial z}dz\right) =$$

$$= -e\int_{(1)}^{(2)} d\varphi = e\left(\varphi_1 - \varphi_2\right) = e\delta\varphi.$$

Різниця потенціалів $\delta\varphi = \varphi_1 - \varphi_2$ дорівнює роботі по переміщенню одиничного додатного заряду з точки 1 до точки 2. З цього випливає, що робота електростатичного поля по замкненому контуру (точка 2 співпадає з точкою 1) завжди дорівнює нулю:

$$\oint\limits_C \vec{E}d\vec{r} = 0.$$

Електростатичний потенціал визначається $\varphi(\vec{r})$ із точністю до довільної сталої. Різниця потенціалів $\delta\varphi$ визначена однозначно.

6.2. Рівняння та граничні умови для електростатичного потенціалу

Напишемо рівняння для електростатичного потенціалу $\varphi(\vec{r})$. Для цього підставимо в перше з рівнянь (6.2) формулу (6.3)

$$-\mathrm{div}\,\mathrm{grad}\,\varphi(\vec{r}) = 4\pi\rho;$$
$$-\left(\nabla,\nabla\right)\varphi(\vec{r}) = 4\pi\rho; \quad \Delta\varphi(\vec{r}) = -4\pi\rho.$$

Електростатичний потенціал задовольняє рівнянню Пуассона

$$\Delta\varphi = -4\pi\rho. \tag{6.4}$$

В області, де густина зарядів дорівнює нулю $\rho = 0$ потенціал електростатичного поля визначається рівнянням Лапласа

$$\Delta\varphi = 0. \tag{6.5}$$

Отримані раніш граничні умови для напруженості електричного поля (див. ф-ли (5.51)) у випадку електростатичного поля можна переписати для електростатичного потенціалу:

$$E_{2n} - E_{1n} = 4\pi\sigma;$$
$$\frac{\partial\varphi_1}{\partial n} - \frac{\partial\varphi_2}{\partial n} = 4\pi\sigma;$$
$$E_{2\tau} - E_{1\tau} = \frac{\partial\varphi_1}{\partial\tau} - \frac{\partial\varphi_2}{\partial\tau} = \frac{\partial}{\partial\tau}\left(\varphi_1 - \varphi_2\right) = 0;$$
$$\varphi_1 - \varphi_2 = 0.$$

На особливій поверхні, де існують поверхневі заряди електростатичний потенціал є неперервним, а його похідні по нормалі до границі розділу областей 1 та 2 мають стрибок

$$\begin{cases} \varphi_1\big|_S = \varphi_2\big|_S; \\ \left(\dfrac{\partial \varphi_1}{\partial n} - \dfrac{\partial \varphi_2}{\partial n}\right)\bigg|_S = 4\pi\sigma. \end{cases} \tag{6.6}$$

6.3. Поле точкового заряду. Закон Кулона

Розташуємо точковий заряд e в початку координат. Густина заряду згідно з формулою(5.16) буде визначатися так

$$\rho(\vec{r}) = e\delta(\vec{r}).$$

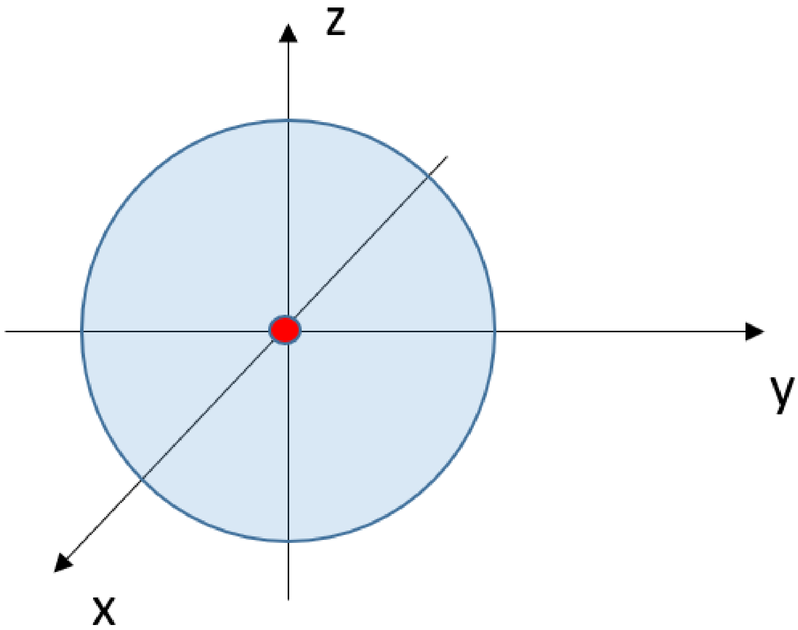
Рівняння Пуассона (6.4) для точкового заряду приймає вигляд

$$\Delta\varphi = -4\pi e\delta(\vec{r}) \tag{6.7}$$

або

$$\mathrm{divgrad}\varphi = -4\pi e\delta(\vec{r}).$$

Знаємо, що дельта-функція «знімає інтегрування», тому інтегруємо по об’єму обидві частини (6.7), щоб позбутися справа дельта-функції. Врахуємо сферичну симетрію поля, яке створює точковий заряд. Це означає, що $\varphi = \varphi(r)$ – від відстані від початку координат. Виберемо об’єм так, щоб точковий заряд опинився в центрі сфери довільного радіусу $\vec{r}$. Очевидно, що в цьому випадку на поверхні сфери потенціал є сталим.



$$\iiint\limits_{r'=r} \mathrm{div}(\mathrm{grad}\varphi)dV' = -4\pi e \underbrace{\iiint \delta(\vec{r}')dV'}_{=1};$$

$$\iiint\limits_{r'=r} \mathrm{div}(\mathrm{grad}\varphi)dV' = -4\pi e.$$

Зліва скористаємось теоремою Гауса

$$\oiint\limits_{\substack{\textit{сфера}\\ \textit{радіусу}\\ r}} \mathrm{grad}\varphi d\vec{S} = -4\pi e; \quad d\vec{S} = dS\vec{n}_r; \quad \vec{n}_r = \frac{\vec{r}}{r}.$$

$$\left(\mathrm{grad}\varphi\right)_{n_r} 4\pi r^2 = -4\pi e; \quad \left(\mathrm{grad}\varphi\right)_{n_r} = \frac{d\varphi}{dr};$$

$$\frac{d\varphi}{dr}\cancel{4\pi} r^2 = -\cancel{4\pi} e;$$

$$\frac{d\varphi}{dr} = -\frac{4\pi e}{r^2}.$$

Маємо розв’язок

$$\varphi(r) = \frac{e}{r} + C$$

Граничну умову для потенціалу обираємо так, щоб на нескінченній відстані від заряду потенціал наближався до нуля $\varphi(r \to \infty) \to 0$. Стала інтегрування $C = 0$.

Потенціал поля точкового заряду

$$\varphi(\vec{r}) = \frac{e}{r} = \frac{e}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}}. \tag{6.8}$$

Напруженість поля точкового заряду

$$\vec{E} = -\nabla\varphi = -e\nabla\left(\frac{1}{r}\right) = -e\frac{d}{dr}\left(\frac{1}{r}\right)\frac{\vec{r}}{r} = \frac{e}{r^2}\frac{\vec{r}}{r} = \frac{e\vec{r}}{r^3}.$$

Отримали відому формулу

$$\vec{E} = \frac{e\vec{r}}{r^3}. \tag{6.9}$$

Можна було для отримання (6.9) скористатися теоремою Гауса для напруженості електричного поля:

$$\oiint\limits_{\substack{\text{сфера}\\ \text{радіусу}\\ r}} \vec{E}d\vec{S} = 4\pi e; \quad d\vec{S} = dS\vec{n}_r; \quad \vec{E} \parallel \vec{n}_r;$$

$$E4\pi r^2 = 4\pi e; \quad E = \frac{e}{r^2}; \quad \vec{E} = \frac{e}{r^2}\vec{n}_r = \frac{e\vec{r}}{r^3}$$

а потім вже шукати потенціал:

$$E = -\frac{d\varphi}{dr}; \quad \varphi = -\int Edr = -e\int \frac{dr}{r^2} = \frac{e}{r} + C; \quad \varphi(r \to \infty) \to 0; \quad C = 0;$$

$$\varphi = \frac{e}{r}.$$

Особливою точкою для потенціалу (6.8) є точка, де знаходиться точковий заряд. Важлива формула, яка випливає з розв’язку (6.8) рівняння (6.7)

$$\Delta\left(\frac{1}{r}\right) = -4\pi\delta(\vec{r}). \tag{6.10}$$

6.3.1. Еквіпотенціальні поверхні та силові лінії

Нагадаємо, що для характеристики скалярного силового поля вводять поняття еквіпотенціальних поверхонь. Це поверхні визначаються рівнянням

$$\varphi(\vec{r}) = const. \tag{6.11}$$

Диференціальне рівняння **еквіпотенціальних поверхонь**

$$d\varphi = \left(d\vec{r}, \nabla\varphi\right) = 0. \tag{6.12}$$

В декартових координатах це рівняння має вигляд

$$\frac{\partial\varphi}{\partial x}dx + \frac{\partial\varphi}{\partial y}dy + \frac{\partial\varphi}{\partial z}dz = 0. \tag{6.13}$$

Для опису векторного поля вводять поняття силових ліній. Силова лінія – це лінія, дотична до якої в кожній точці лінії визначає напрямок вектору напруженості поля в даній точці $\vec{E} \parallel d\vec{r}$. **Рівняння силових ліній** – це умова паралельності двох векторів у тривимірному просторі згідно з якою їхній векторний добуток дорівнює нулю:

$$\left[\vec{E}, d\vec{r}\right] = 0. \tag{6.14}$$

В декартових координатах з (6.14) маємо такі два рівняння

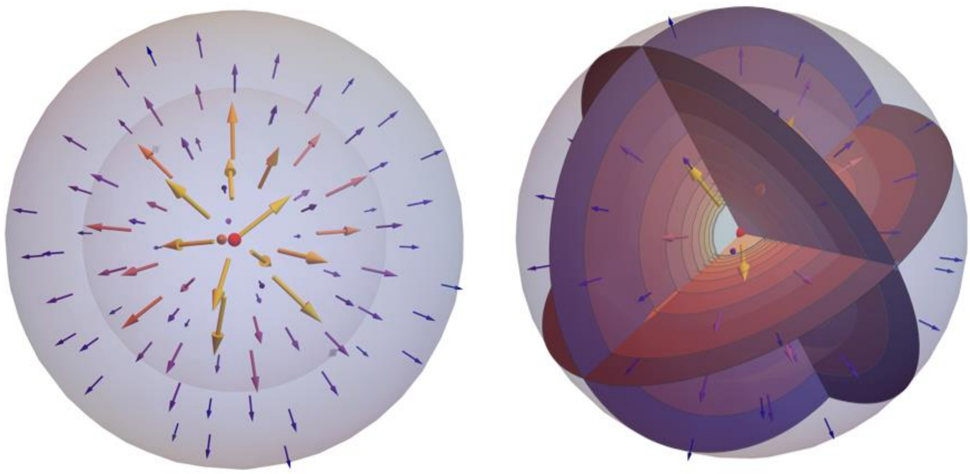
$$\frac{dx}{E_x} = \frac{dy}{E_y} = \frac{dz}{E_z}.$$

Еквіпотенціальні поверхні поля точкового заряду – сфери із центром в точці, де знаходиться заряд. Силові лінії – радіуси.

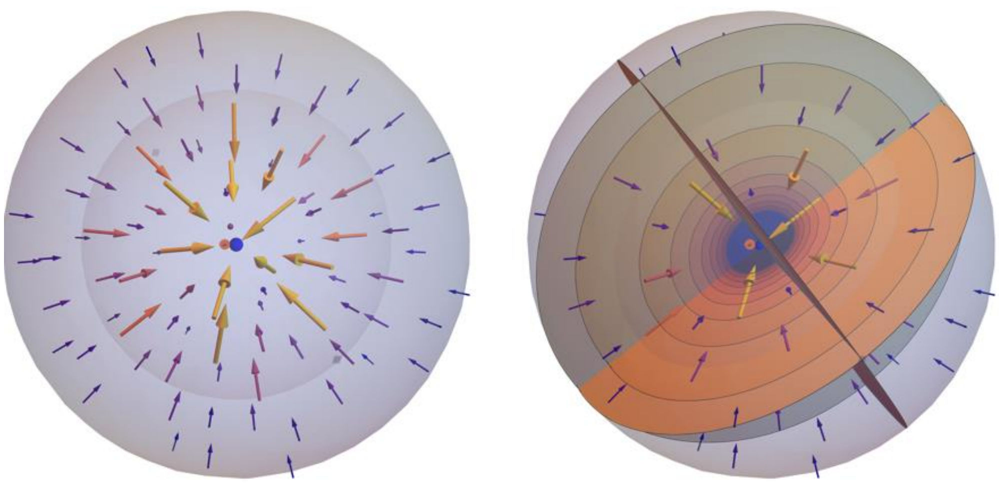
Нижче наведено кілька рисунків, які моделюють силові лінії та еквіпотенціальні поверхні поля нерухомого точкового заряду

Тривимірне моделювання

Додатний заряд



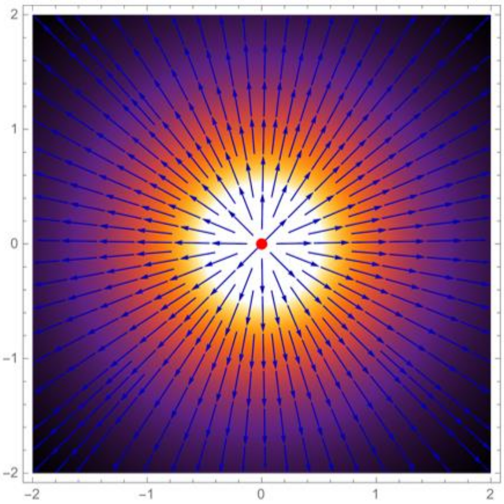
Від’ємний заряд



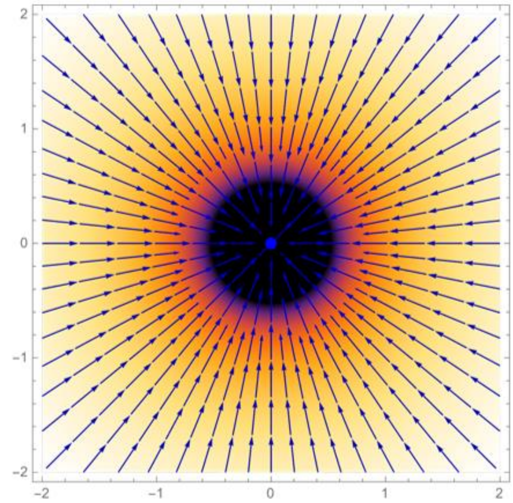
2D моделювання

2D pictures of point charge force lines

Додатний заряд

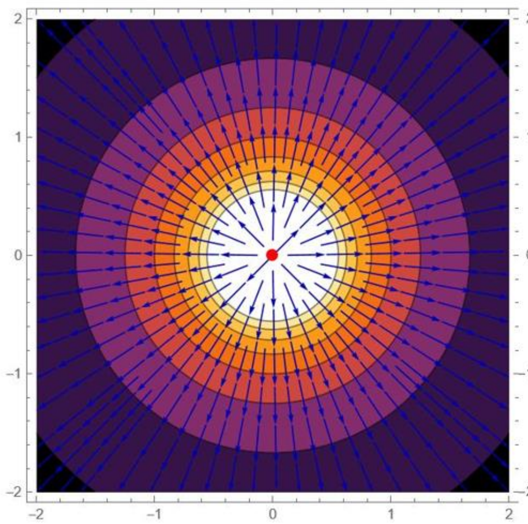


Відʼємний заряд



2D pictures of point charge force lines and equipotential surfaces

Додатний заряд



Відʼємний заряд